君津校校数学2年　　学年末テスト対策　【解答･解説】

$\boxed{1}$ 解答　(1)　$x=\frac{5}{2}$　(2)　$x\leqq\frac{4}{3}$　(3)　$x<2$

解説

(1)　方程式を変形すると　$2^{2x}=2^5$

よって　$2x=5$　したがって　$x=\frac{5}{2}$

(2)　不等式を変形すると　$3^{3x}\leqq 3^4$

底 3 は 1 より大きいから　$3x\leqq 4$　したがって　$x\leqq\frac{4}{3}$

(3)　$0.09=(0.3)^2$ であるから，不等式は　$(0.3)^x>(0.3)^2$

底 0.3 は 1 より小さいから　$x<2$

$\boxed{2}$ 解答　(1)　$x=3$　(2)　$x>1$

解説

(1)　方程式を変形すると　$(2^x)^2-6\cdot 2^x-16=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-6t-16=0$

よって　$(t+2)(t-8)=0$　$t>0$ であるから　$t=8$

ゆえに　$2^x=8$　すなわち　$2^x=2^3$　したがって　$x=3$

(2)　不等式を変形すると　$(3^x)^2+3^x-12>0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2+t-12>0$

よって　$(t-3)(t+4)>0$

$t+4>0$ であるから　$t-3>0$　すなわち　$t>3$

ゆえに　$3^x>3$　すなわち　$3^x>3^1$

底 3 は 1 より大きいから　$x>1$

$\boxed{3}$ 解答　(1)　0　(2)　3

解説

(1)　$\frac{1}{2}\log_5 2+3\log_5\sqrt{2}-\log_5 4=\log_5 2^{\frac{1}{2}}+\log_5\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3-\log_5 2^2$

$=\log_5 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2}=\log_5 2^0=\log_5 1=0$

(2)　$\log_3 4\cdot\log_4 27=\log_3 4\cdot\frac{\log_3 27}{\log_3 4}=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　$x=5$　(2)　$x>1$　(3)　$1<x<\frac{4}{3}$

解説

(1)　対数の定義から　$x-3=4^{\frac{1}{2}}$　すなわち　$x-3=2$

よって　$x=5$

(2)　真数は正であるから　$x+1>0$

すなわち　$x>-1$　……①

不等式を変形すると　$\log_2(x+1)>\log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから　$x+1>2$　よって　$x>1$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$x>1$

(3)　真数は正であるから　$x-1>0$

すなわち　$x>1$　……①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x-1<\frac{1}{3}$　よって　$x<\frac{4}{3}$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$1<x<\frac{4}{3}$

$\boxed{5}$ 解答　$x=1$ で最大値 6，$x=4$ で最小値 2

解説

$y=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+6$　$(1\leqq x\leqq 8)$

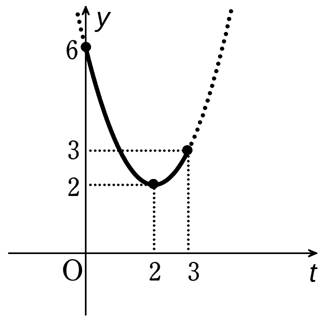
$\log_2 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 8$であるから

$\log_2 1\leqq\log_2 x\leqq\log_2 8$

すなわち　$0\leqq t\leqq 3$　……①

y を t で表すと　$y=t^2-4t+6=(t-2)^2+2$

① の範囲において，y は $t=0$ で最大値 6，$t=2$ で最小値 2 をとる。



また　$t=0$ のとき　$\log_2 x=0$　よって　$x=2^0=1$

$t=2$ のとき　$\log_2 x=2$　よって　$x=2^2=4$

したがって　$x=1$ で最大値 6，$x=4$ で最小値 2

$\boxed{6}$ 解答　小数第 7 位

解説

$\log_{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{30}=30\log_{10}\frac{6}{10}=30\log_{10}\frac{2\times 3}{10}$

$=30(\log_{10}2+\log_{10}3-1)=30(0.3010+0.4771-1)$

$=30\times(-0.2219)=-6.657$

$-7<\log_{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{30}<-6$ であるから　$10^{-7}<\left(\frac{3}{5}\right)^{30}<10^{-6}$

よって，$\left(\frac{3}{5}\right)^{30}$ は小数第 7 位に初めて 0 でない数字が現れる。

$\boxed{7}$ 解答　$f(x)=2x^2-3x+4$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると　$f'(x)=2ax+b$

$f'(1)=1$ から　$2a+b=1$

$f'(2)=5$ から　$4a+b=5$

$f(0)=4$　から　$c=4$

これを解くと　$a=2$，$b=-3$，$c=4$

よって　$f(x)=2x^2-3x+4$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$y=2x+2$　(2)　$y=-4x+6\sqrt{3}$，$y=-4x-6\sqrt{3}$

解説

$f(x)=-x^3+5x$ とすると　$f'(x)=-3x^2+5$

(1)　$f'(1)=-3\cdot 1^2+5=2$ であるから，求める接線の方程式は

$y-4=2(x-1)$　すなわち　$y=2x+2$

(2)　接点の座標を $(a,\ -a^3+5a)$ とすると，傾きが -4 であるから

$f'(a)=-4$　すなわち　$-3a^2+5=-4$　これを解くと　$a=\pm\sqrt{3}$

よって，接点の座標は　$(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$，$(-\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$

したがって，求める接線の方程式は

$y-2\sqrt{3}=-4(x-\sqrt{3})$，$y+2\sqrt{3}=-4(x+\sqrt{3})$

すなわち　$y=-4x+6\sqrt{3}$，$y=-4x-6\sqrt{3}$

$\boxed{9}$ 解答　$a=-6$，$b=9$，$c=-5$

解説

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ が $x=1$ で極大値をとるとき　$f'(1)=0$

よって　$3+2a+b=0$　……①

また，$f(x)$ が $x=3$ で極小値 -5 をとるとき　$f'(3)=0$，$f(3)=-5$

よって　$27+6a+b=0$　……②，　$27+9a+3b+c=-5$　……③

①，②，③ を解くと　$a=-6$，$b=9$，$c=-5$

このとき　$f(x)=x^3-6x^2+9x-5$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

したがって，右の増減表が得られ，条件を満たす。

よって　$a=-6$，$b=9$，$c=-5$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 -1	↘	極小 -5	↗

$\boxed{10}$ 解答　$a<-2$，$2<a$ のとき 1 個；　$a=\pm 2$ のとき 2 個；

$-2<a<2$ のとき 3 個

解説

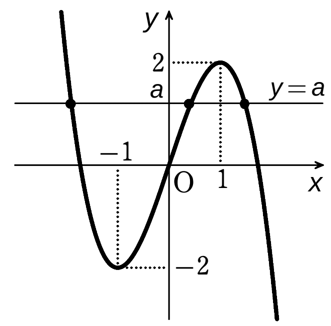
方程式を変形すると　$-x^3+3x=a$

$f(x)=-x^3+3x$ とおくと　$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm 1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘



関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の異なる実数解の個数に一致する。

よって，右の図より　$a<-2$，$2<a$ のとき 1 個；

$a=\pm 2$ のとき 2 個；$-2<a<2$ のとき 3 個

$\boxed{11}$ 解答 (1) $F(x)=2x^2-4x+3$ (2) $F(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+1$

解説

(1) $F'(x)=4x-4$ であるから

$$F(x)=\int(4x-4)dx=2x^2-4x+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$F(1)=1$ から $2\cdot1^2-4\cdot1+C=1$

すなわち $-2+C=1$ ゆえに $C=3$

よって $F(x)=2x^2-4x+3$

(2) $F'(x)=3(x+1)(x-2)$ であるから

$$F(x)=\int 3(x+1)(x-2)dx=\int(3x^2-3x-6)dx$$

$$=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$F(0)=1$ から $C=1$

よって $F(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+1$

$\boxed{12}$ 解答 $\dfrac{27}{2}$

解説

2つの放物線の交点の x 座標は，方程式

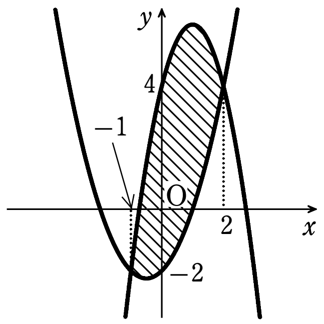
$$x^2+x-2=-2x^2+4x+4$$

すなわち $3(x+1)(x-2)=0$ を解いて $x=-1,\ 2$

$-1\leqq x\leqq 2$ では，$x^2+x-2\leqq -2x^2+4x+4$ であるから

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-2x^2+4x+4)-(x^2+x-2)\}dx$$

$$=-3\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=-3\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{2}$$



参考 等式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用すると，積分の計算は

$$S=-3\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=-3\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx=\frac{3}{6}\{2-(-1)\}^3=\frac{27}{2}$$

$\boxed{13}$ 解答 略

解説

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

BF : FD $=7:3$ であるから $\overrightarrow{AF}=\dfrac{3\vec{b}+7\vec{d}}{7+3}=\dfrac{3\vec{b}+7\vec{d}}{10}$

CE : ED $=4:3$ であるから $\overrightarrow{AE}=\dfrac{3\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AD}}{4+3}=\dfrac{3(\vec{b}+\vec{d})+4\vec{d}}{7}=\dfrac{3\vec{b}+7\vec{d}}{7}$

よって $\overrightarrow{AF}=\dfrac{7}{10}\overrightarrow{AE}$

したがって，3点 A，F，E は一直線上にある。

$\boxed{14}$ 解答 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$

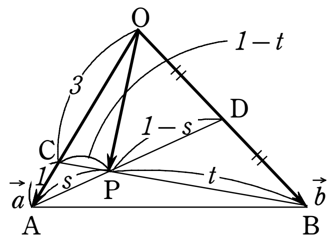
解説

AP : PD $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{1}{2}s\vec{b}$ …… ①

BP : PC $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ …… ②



$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，①，② より

$$1-s=\frac{3}{4}t,\quad \frac{1}{2}s=1-t$$

これを解くと $s=\dfrac{2}{5}$，$t=\dfrac{4}{5}$

したがって $\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$

$\boxed{15}$ 解答 $x-3y+1=0$

解説

求める直線の方程式は $1\times(x-2)+(-3)(y-1)=0$

すなわち $x-3y+1=0$

$\boxed{16}$ 解答 (1) $\overrightarrow{BH}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ (2) $\overrightarrow{AG}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

解説

(1) $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}=\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

$\boxed{17}$ 解答 $\overrightarrow{AB}=(3,\ -1,\ 2)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{14}$

解説

$\overrightarrow{AB}=(4-1,\ 1-2,\ -1-(-3))=(3,\ -1,\ 2)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{14}$

$\boxed{18}$ 解答 (1) 3 (2) 60°

解説

(1) $\overrightarrow{AB}=(-3-(-4),\ 2-0,\ 0-1)=(1,\ 2,\ -1)$

$\overrightarrow{AC}=(-2-(-4),\ 1-0,\ 2-1)=(2,\ 1,\ 1)$

よって $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2+2\times1+(-1)\times1=3$

(2) $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{3}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから $\theta=60°$

$\boxed{19}$ 解答 $\vec{p}=(2,\ -1,\ 2)$，$(-2,\ 1,\ -2)$

解説

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{p}$ より $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ であるから $x-2y-2z=0$ …… ①

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より $\vec{b}\cdot\vec{p}=0$ であるから $x+2y=0$ …… ②

$|\vec{p}|^2=3^2$ であるから $x^2+y^2+z^2=3^2$ …… ③

①，② から，y，z を x で表すと $y=-\dfrac{1}{2}x$，$z=x$

これらを ③ に代入すると $x^2+\left(-\dfrac{1}{2}x\right)^2+x^2=9$

整理すると $\dfrac{9}{4}x^2=9$ よって $x^2=4$

すなわち $x=\pm2$

$x=2$ のとき $y=-1$，$z=2$， $x=-2$ のとき $y=1$，$z=-2$

ゆえに $\vec{p}=(2,\ -1,\ 2)$，$(-2,\ 1,\ -2)$